1.- FILTRADO MEDIANA GENERALIZADO Y TÉCNICAS DE FILTRADO NO LINEAL

1.1.-INTRODUCCIÓN

Bovik, Huang y Munson han introducido una generalización de filtros mediana llamados *filtro de orden estadístico (OSF)* en la cual el valor de entrada en un punto es sustituido por una combinación lineal de valores ordenados en los puntos vecinos. La clase de filtros OSF incluye como caso especial el filtro mediana, el filtro *running mean*, y el filtro min (max) que utiliza un valor extremo en lugar de la mediana. Nótese como el filtro OSF combina una operación lineal, la ordenación, con una operación lineal. También haremos una introducción en el filtro modificado de valor ajustado (MTM). El filtro MTM selecciona la muestra de la mediana mediante una ventana centrada en un punto, y entonces halla la media sólo en aquellas muestras dentro de la ventana cerrada a la muestra de la mediana. Veremos que el filtro MTM está fuertemente relacionado con los filtros *L* y *M*.

Los tamaños de las ventanas de los filtros *MTM, L* y *M* están restringidas como un filtrado mediana. Si la duración de un pulso estrecho de la señal a preservar es *P*, entonces el tamaño máximo de la ventana permitido será *2P - 1* para el caso de ruido libre. Puede ser, sin embargo, que necesitemos un tamaño de ventana mayor que *2P - 1* para suficiente suavizado de componentes de ruido no impulsivo, pero entonces los pequeños detalles de la señal no se filtrarán. Para prevenir esta dificultad, una ventana doble (DW) será introducida como variación para el filtro MTM. En el filtro DW MTM, una ventana pequeña y grande son usadas para producir cada punto de salida, la ventana pequeña permite la retención de pequeños detalles de la señal y la ventana grande permitirá la supresión de ruido. Específicamente, el filtro DW MTM usa la mediana desde la observación de una ventana pequeña centrada en un punto que rechaza los *outlier* en la ventana grande, desde el cual valor medio será entonces hallado.

1.2.- EL FILTRO L

La salida y_k de un filtro *L* de tamaño de la ventana *2N* + 1en un tiempo de índice *k*, para una secuencia $\{x_i\}$ viene dada por

$$y_k = \sum_{j=1}^{2N+1} A_j x_{(j)}^k$$

donde $x_{(j)}^k$ es la "j" muestra más pequeña de las *2N + 1* muestras dentro de la ventana centrada en *k*, y donde $\{A_j\}_{j=1}^{2N+1}$ es un conjunto de pesos de constante con

$$\sum_{j=1}^{2N+1} A_j = 1$$

En un filtro *L*, existe una operación no-lineal (ordenación) y lineal (media ponderada). Los filtros *L* pueden intercambiarse de un filtro lineal *running mean* a filtros no-lineales como los filtros medianas o min (max).

Los filtros *L* tienen propiedades similares a los filtros mediana, e incluyen las siguientes propiedades, donde la secuencia de salida $\{y_i\}$ de un suavizador S está escrita en general como $\{y_i\} = S\{x_i\}$ para una entrada de secuencia $\{x_i\}$.

PROPIEDAD 1.- (Invarianza en escala y traslación): Para cualquier filtro *L* simétrico, de valor uno para el cual el peso del filtro satisface

$$A_l = A_{2N+1-(l-1)} \qquad\qquad l = 1,2,\cdots,2N+1$$

$$S[a\{x_i\} + b\{1\}] = aS[\{x_i\}] + b\{1\}$$

donde {1} es la secuencia de contante de valor 1, y *a* y *b* son cualquier constante.

PROPIEDAD 2.- (Preservación curso lineal): Para un filtro *L* simétrico tendremos

$$S[\{y_i\}] = \{x_i\}$$

cuando $\{x_i\} = a\{i\} + \{b\}$, para cualquier constante *a* y *b*.

Para una buena retención de bordes con adecuada media de ruido aleatorio, frecuentemente se requiere que las componentes de ruido impulsivo sean suprimidas razonablemente bien. El ruido impulsivo en la entrada dan como resultados que tendremos picos relativamente largos, que no pueden ser suprimidos efectivamente usando operaciones lineales de media. Un filtro *L* para los cuales los pesos A_j son contiguos a cero para valores de *j* cercanos a 1 o 2N + 1 puede que sea más efectivo en esta situación. Esto es debido a que los picos de ruido impulsivo tienden a aparecer en los fines de una secuencia ordenada de valores dentro de cualquier ventana Observamos que la preservación de bordes y la supresión de ruido impulsivo requiere similares modelos de peso. Cuando un borde entra en una ventana la mediana tenderá a estar asociada con datos de un lado del borde. Los datos del otro lado del borde deberían entonces ser tratados como componentes de ruido impulsivo y no ser permitidas en una fuerte influencia del valor suavizado de salida. Es por ello, que los filtros controlan con que suprimir el ruido impulsivo y también tender a preservar los bordes. Es más, cuando el centro de la ventana toca un borde *N* fuera de los valores *2N + 1* , debería ser tratado como ruido impulsivo. Esto explica porque el filtro mediana es el único filtro *L* que preserva el borde de manera ideal.

1.3.- EL FILTRO M

La salida y_k de un filtro M está definida como una solución de la ecuación

$$\sum_{i=k-N}^{k+N} \Psi\left[x_i - y_k\right] = 0$$

donde Ψ es una alguna función impar, continua y con preservación de signo, por tanto Ψ (x) es positiva (negativa) cuando *x* es positiva (negativa). Cuando Ψ es la función lineal definida por $\Psi(x) = ax$, para cualquier constante *a*, el filtro M se reduce a un filtro *running mean*. Veremos, por otro lado, que el filtro *M* se aproxima al filtro mediana en sus características en tanto que Ψ se aproxima al límite extremo (función signo) bajo ciertas condiciones. A continuación ,estableceremos los siguientes lemas y propiedades.

LEMA 1.- Siempre existirá una solución de la ecuación anterior; si Ψ está estrictamente creciendo, la solución es única.

PROPIEDAD 1.- (Invarianza en traslación): Para cualquier filtro M, existen soluciones para las secuencias de salida que satisfacen

$$S[\{x_i\} + b\,\{1\}] = S[\{x_i\}] + b\,\{1\}$$

para cualquier constante *b*.

PROPIEDAD 2.- (Preservación curso lineal): Para cualquier filtro M, existe un solución para la secuencia de salida que satisface

$$S[\{x_i\}] = \{x_i\}$$

cuando $\{x_i\} = a\{i\} + \{b\}$ para cualquier constante *a* y *b*.

LEMA 2.- Para un filtro LTM con parámetro de filtro *p*, existe una salida única y_k para cada tiempo *k*. La salida siempre se encontrará en el rango

$$m_k - \delta \le y_k \le m_k + \delta$$

donde m_k es la mediana en la ventana y $\delta = g^{-1}\{[N/[N+1]\,g(p)\}$.

OBSERVACIÓN 1.- Para un filtro LTM con parámetro *p*, si cualquier $x^k_{(N)}$ o $x^k_{(N+2)}$ se encuentra en $[m_k - p, m_k + p]$ entonces también se encuentra dentro de $[y_k - p, y_k + p]$.

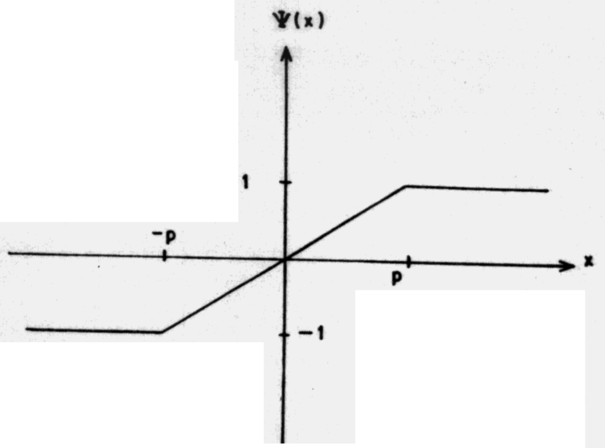

Fig.- 1 Función ψ de un filtro STM

OBSERVACIÓN 2.- La salida y_k de un filtro LTM con parámetro p será localizada en una de las siguientes regiones, dependiendo de los datos.

1) Si $x_{(N)}^k \le m_k - p$ y $x_{(N+2)}^k \ge m_k + p$ entonces $y_k = m_k$.

2) Si $x_{(N)}^k \le m_k - p$ y $x_{(N+2)}^k < m_k + p$ entonces $x_{(N+2)}^k - p \le y_k < m_k$.

3) Si $x_{(N)}^k > m_k - p$ y $x_{(N+2)}^k \ge m_k + p$ entonces $m_k < y_k \le x_{(N)}^k + p$.

4) Si $x_{(N)}^k > m_k - p$ y $x_{(N+2)}^k < m_k + p$ entonces $x_{(N+2)}^k - p \le y_k < x_{(N)}^k + p$.

Los resultados de esta observación no depende del tamaño de la ventana y la función *g*.

OBSERVACIÓN 3.- (Ventana tamaño 3).- La salida y_k de un filtro LTM con tamaño de ventana 3 puede ser determinada mediante una de las siguientes relaciones:

1) Si $x_{(1)}^k \le m_k - p$ y $x_{(3)}^k \ge m_k + p$ entonces $y_k = m_k$.

2) Si $x_{(1)}^k \le m_k - p, x_{(3)}^k < m_k + p$ y $\sum_{j=1}^{3} \Psi\left[x_{(j)}^k - (x_{(1)}^k + p)\right] > 0$ entonces $-g[p] + \sum_{j=2}^{3} g\left[x_{(j)}^k - y_k\right] = 0$. En este caso, para el filtro STM, tendremos

$$y_k = \frac{1}{2}\left[x_{(3)}^k + m_k - p\right].$$

3) Si $x_{(1)}^k > m_k - p, x_{(3)}^k \geq m_k + p$ y $\sum_{j=1}^{3} \Psi\left[x_{(j)}^k - (x_{(3)}^k - p)\right] < 0$ entonces $-g[p] + \sum_{j=1}^{2} g\left[x_{(j)}^k - y_k\right] = 0$. En este caso, para el filtro STM, tendremos

$$y_k = \frac{1}{2}\left(x_{(1)}^k + m_k + p\right).$$

En un filtrado *M*, la elección de la función ψ podría estar basada en un criterio como la varianza de salida para una señal constante en una entrada con ruido blanco. Se ha encontrado, en particular, que un filtro STM tiene la propiedad que su varianza asintótica es un mínimo para el peor caso de ruido gaussiano contaminado (ε) con una función de densidad probabilística (pdf) de *f[m] = (1 - ε)η + εh [m];* aquí *η* es un *pdf* gaussiano con varianza conocida, *h* es una pdf simétrica arbitraria, y *ε* es el grado de contaminación.

OBSERVACIÓN 4.- Supongamos

$$\left|x_{(1)}^k - m_k\right| \stackrel{\Delta}{=} r_1 \leq p \quad \text{y} \quad \left|x_{(2N+1)}^k - m_k\right| \stackrel{\Delta}{=} r_2 \leq p$$

Si

$$r_1 \leq \frac{2N+1}{2N} p - \frac{1}{2} r_2$$

cuando

$$-\sum_{j=1}^{N} \Psi\left[x_{(j)}^k - m_k\right] \leq \sum_{j=N+2}^{2N+1} \Psi\left[x_{(j)}^k - m_k\right]$$

o

$$r_2 \leq \frac{2N+1}{2N} p - \frac{1}{2} r_1$$

cuando

$$-\sum_{j=1}^{N} \Psi\left[x_{(j)}^{k} - m_k\right] \geq \sum_{j=N+2}^{2N+1} \Psi\left[x_{(j)}^{k} - m_k\right]$$

entonces la salida de un filtro STM es el valor de la muestra.

Está claro que si el valor de *p* es lo suficientemente grande, el filtro STM tenderá primeramente como un *running mean filter* para variaciones pequeñas de la señal en ruido blanco aditivo.

Suponiendo que la entrada a un filtro STM es un borde ideal, entonces la salida de secuencia estará dada por

$$y_k = \begin{cases} 0 & si \quad j < j - N \\ \dfrac{wp}{2N+1-w} & si \quad j - N \leq k < j \\ H - \dfrac{(N+1-w)p}{w} & si \quad j \leq k < j + N \\ H & si \quad k \geq j + N \end{cases}$$

para $w = K - (j - N) + 1$, cuando

$$H > \left(1 + \frac{N}{N+1}\right) p$$

Esto es, *2N* puntos de salida son diferentes desde los correspondientes valores de entrada, como en el caso de filtrado lineal con el mismo tamaño de ventana, y el borde es ensuciado

La conclusión que sacamos es que el filtro STM puede funcionar parecido al *running-mean filter* cuando no exista ruido impulsivo, y tiende a trabajar de manera más parecida a un filtro mediana cuando existen bordes. El ruido impulsivo puede ser suprimido efectivamente por filtrado STM debido a que básicamente limita la influencia de las observaciones desviándose sustancialmente desde el valor de la muestra en cualquier ventana.

El valor de *p* en un filtrado STM puede ser elegido en base al compromiso entre preservación de bordes y supresión de ruido impulsivo por un lado, y supresión de ruido no impulsivo por otro lado. Por regla general, *p* debería ser como mínimo tan grande como σ, la desviación standard del ruido, donde para la preservación de bordes y supresión de ruido impulsivo, necesitamos tener un valor de *p* lo más pequeño posible. Usando $k = j - 1$ o j, se observa que la cantidad máxima de ensuciamiento del borde ideal en un filtrado STM es $pN/(N+1)$. Esto es, por ejemplo, si queremos diseñar un filtro STM con la cantidad máxima de ensuciamiento aproximadamente igual a *H/4* donde *H* es el peso mínimo de los bordes, *p* debería ser menor de $H(N+1)/4N$. En este caso, sería posible diseñar un filtro STM apropiado si $\sigma < H(N+1)/4N$

1.4.- FILTRO MODIFICADO TRIMMED MEAN (MTM) .

En un filtrado α-TM, un conjunto de valores *(N-T)* encerrados en una muestra mediana m_k es seleccionada desde cualquiera de los dos conjuntos de muestras de *N* en cualquiera de los dos lados del valor de la mediana. Entonces la media de las *2(N-T)* muestras seleccionadas y el valor de la mediana son usadas como la salida. Por tanto, se puede decir que el filtro α-TM halla la media sólo en aquellas muestras en la ventana incluidas en un rango $[m_k - q_1, m_k + q_2]$donde q_1 y q_2 dependen de los datos. El filtro en cuestión, al que llamaremos filtro modificado *trimmed mean (MTM)* se sugiere por las siguientes razones: El filtro MTM determina primero el valor de la mediana de m_k dentro de su ventana y entonces elige un intervalo $[m_k - q, m_k + q]$ usando una constante preseleccionada q. Dentro de la ventana, los valores de los datos fuera de este intervalo son descartados y entonces la media de los valores restantes es la salida. Obsérvese que el número de muestras usadas en el cálculo de la media, no está fijada de anticipo en un filtrado MTM.

El filtro MTM es capaz de rechazar componentes de ruido impulsivo porque para cada punto de salida se empieza por la obtención del valor de la mediana dentro de la correspondiente ventana. De hecho, el tamaño de la ventana está construido exactamente como un filtrado mediana, permitiendo a valores de la señal de una anchura mínima específica no ser tratadas como impulsos. Para un particular tamaño de ventana, un valor muy pequeño de q hace que el filtro MTM tienda como un filtro mediana, mientras que para grandes valores de q el filtro tiende a un filtro *running-mean.* Para un buen funcionamiento en la supresión de ruido blanco gaussiano, y simultáneamente para la preservación de bordes, el valor de q debería ser elegido como el máximo valor para el cual los bordes puedan esperarse que se preserven. Esto significa que podríamos elegir q aproximadamente igual a $H\text{-}2\sigma$, donde H es el peso mínimo de los bordes y σ es la desviación standard de ruido, para H aproximadamente igual o mayor que 4σ. Cuando H es relativamente pequeño o cuando la información del peso del borde no está disponible, q podrá ser seleccionada a partir del conocimiento de la desviación standard de ruido σ únicamente; por ejemplo, uno puede usar para q el valor 2σ. Un valor pequeño de q producirá una mejor retención de bordes pero un pobre suavizamiento, y viceversa.

Una vez que el valor de la mediana en m_k ha sido seleccionado dentro de cualquier ventana en un filtro MTM, se podría elegir que valores de la media están incluidos dentro del rango $[m_k\text{-}q\ ,\ m_k\text{+}q]$ desde una cantidad de datos de una gran ventana centrada en k. Esto nos lleva al filtro *doble ventana MTM (DW-MTM)* que definiremos de la siguiente manera: Sean dos ventanas de longitud $2N+1$ y $2L+1$ con $L>N$, y centradas en k. Primero, el valor de la mediana de m_k se hallará desde la ventana pequeña $2N+1$. Para algún número positivo q, un intervalo $[m_k\text{-}q\ ,m_k\text{+}q]$ será elegido. Entonces el valor de los puntos incluidos dentro del intervalo $[m_k\text{-}q\ ,m_k\text{+}q]$ a través de las muestras de la ventana grande de tamaño $2L+1$ serán computadas como la salida.

El filtro DW-MTM suprime el ruido no impulsivo de manera efectiva mediante la media de los valores en la ventana grande mientras retiene los pulsos angostos de la señal por selección del valor de la median desde la ventana pequeña. El funcionamiento del filtro DW-MTM varía con un filtrado mediana con ventana de tamaño $2N+1$ a un filtrado running-mean con una ventana de tamaño $2L+1$.

El tamaño $2N+1$ de una ventana pequeña en un filtrado *DW-MTM* está relacionado con un filtrado mediana. Esto es para prevenir pérdidas de pulsos angostos de la señal de una anchura mínima especifica y de manera general para retener pequeños detalles de la señal. Si q se hace muy pequeña, el filtro DW-MTM tenderá a un filtrado mediana, independientemente del tamaño de la ventana grande $2L+1$. Por otro lado, un valor grande de q producirá un filtro running mean cuyo tamaño de la ventana será $2L+1$. El valor de q es generalmente elegido como en el filtrado MTM (q ≈ H - 2σ para el menor peso del borde H y desviación standard del ruido σ). Esto es, el tamaño de la ventana grande está gobernado por el ancho de banda de la parte paso-bajo de la señal; un filtro running mean usaría un tamaño similar de la ventana si los ejes no estuvieran presentados en la señal.

A la conclusión que hemos llegado, es que el filtro DW-MTM desarrolla una mejor relación con respecto a otros filtros.

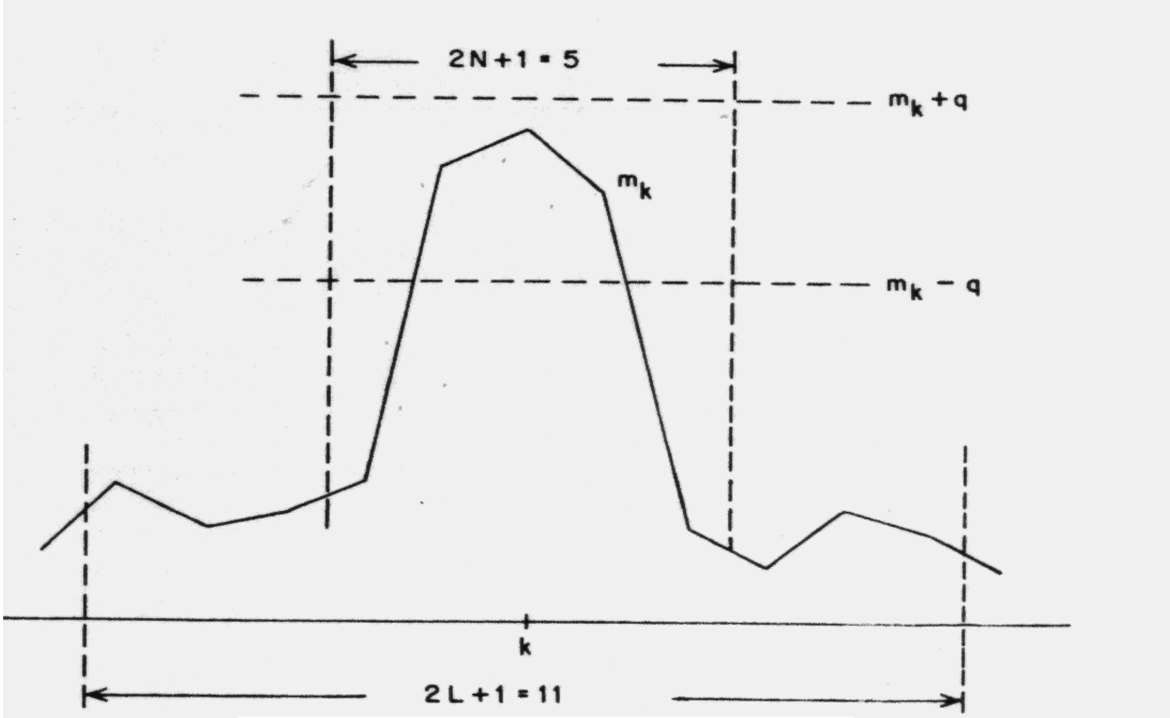

Fig 2.- Operación de un filtro DW MTM