

## 4.10.- DESCRIPCIÓN TEÓRICA DE OTROS FILTROS

### 4.10.1- INTRODUCCIÓN

En este capítulo, nos adentraremos en otros filtros. Habrá algunos que se explicarán muy concisamente y otros se analizará profundamente.

Para comenzar este capítulo, haremos unas diferencias entre el filtrado de media y el filtrado mediana.

Un filtrado de media, queda encuadrado por defecto como un filtro lineal. Para un filtro de media de una dimensión de longitud  $N = 2k + 1$ , su salida para un instante  $i$ , queda definido mediante

$$y[m] = \frac{1}{2k+1} \sum_{j=-k}^k x[m+j]$$

Al ser una operación lineal, llegamos a (para  $k=3$ ):

$$\begin{aligned} y[m] &= \frac{1}{7} \sum_{j=-3}^3 x[m+j] = \frac{1}{7} \sum_{j=-3}^3 s[m+j] + \frac{1}{7} \sum_{j=-3}^3 n[m+j] \\ &= (\text{señal filtrada aparente}) + (\text{ruido filtrado}) \end{aligned}$$

Esto es suficiente para analizar la atenuación del ruido para una señal.

El Filtrado Mediana viene dado por la expresión

$$y[m] = \text{MED}\{x[m-k], x[m-k+1], \dots, f[m], f[m+k-1], f[m+k]\}$$

donde MED toma el valor central después de la ordenación.

El filtrado mediana es no lineal y por tanto no es posible aplicar la operación a la señal y al ruido de manera separada.

#### 4.10.2-ESTUDIO COMPARATIVO ENTRE FILTRADO MEDIANA Y FILTRADO DE MEDIA.

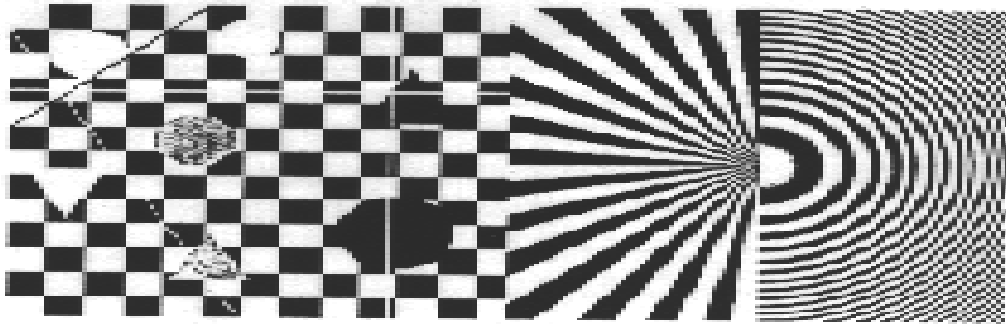
- ❑ El filtrado de media da problemas en los bordes.
  
- ❑ El filtrado mediana preserva los bordes. (Este hecho es muy importante en el procesamiento digital de imágenes ya que, debido a las propiedades de la visión humana, los bordes son lo que ofrece mayor información en las imágenes.
  
- ❑ El filtrado de media atenúa ruido aditivo Gaussiano de manera efectiva y la atenuación no depende de la señal.
  
- ❑ El filtrado mediana atenúa ruido aditivo Gaussiano al menos tan bien como el filtrado de media pero la atenuación es dependiente de la señal. Por ejemplo, tiende a formar patrones de escaleras cuando filtramos señales de ruido en forma de rampa.
  
- ❑ En el caso de ruido impulsivo, el filtrado mediana es mejor que el filtrado de media. En el caso de un impulso simple, el filtrado de media propaga el impulso pero reduce la amplitud, mientras que el filtrado mediana elimina totalmente el impulso.
  
- ❑ Para 1-D, el filtrado mediana con una longitud en la ventana de  $N - 2k + 1$  elimina completamente los impulsos de longitud inferior a  $k + 1$  independientemente de la señal.

Esto es una diferencia fundamental entre el funcionamiento de los filtros lineales y no lineales. La *respuesta al impulso* (esto es, la señal de salida cuando la señal de entrada es igual a 1 para un instante  $i=0$  y cero para cualquier otro) de un filtro, lineal de tiempo invariante no trivial claramente no puede ser una secuencia de valores cero.

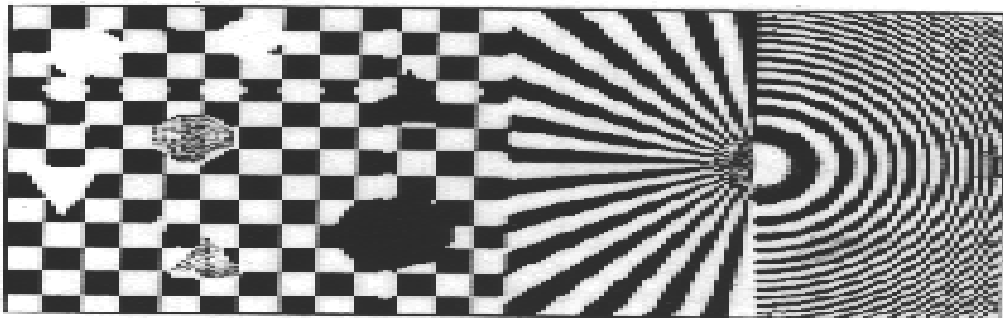
- ❑ El funcionamiento ideal del filtrado mediana se mantiene únicamente para el caso que tengamos un impulso sobre una señal constante. Por ejemplo, si el impulso está encerrado sobre un borde, se puede eliminar pero en el mismo tiempo, el borde se mueve hacia el impulso. Esto es llamado el *efecto jitter*.

Para el estudio del filtrado mediana y filtrado de media en el procesado de imágenes, consideraremos una máscara cuadrada de  $5 \times 5$ .

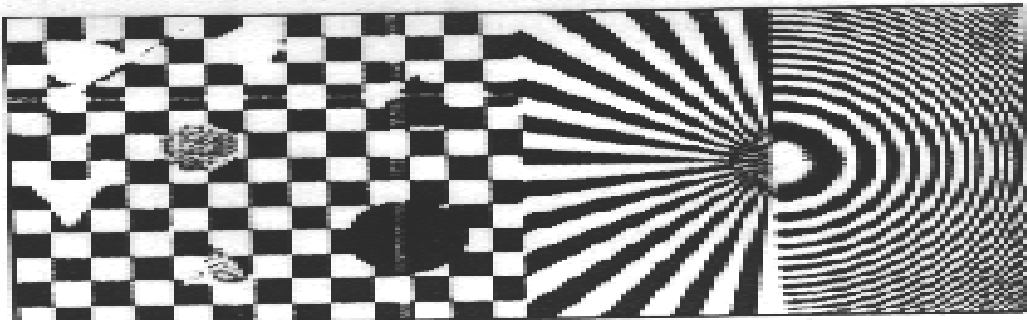
La ventana que se va desplazando sobre cada pixel, la operación (media / mediana) usa los 25 valores del pixel dentro de la ventana, y el resultado de la operación es la salida en la localización de la ventana.



**Fig.1.- IMAGEN ORIGINAL "GEOMÉTRICA"**



**Fig. 2.- IMAGEN CON FILTRADO MEDIANA CON UNA VENTANA 5 X 5**



**Fig. 3.- IMAGEN CON FILTRADO DE MEDIA CON UNA VENTANA 5 X 5**

El primer ejemplo de imagen, “Geométrica”, está creada artificialmente y su estructura es de figuras geométricas. Las comparaciones entre ambos filtrado, han sido las siguientes:

❑ Como el filtro de media no es capaz de preservar los bordes, y la imagen “Geométrica” contiene un gran número de ellos, la apariencia visual total después del filtrado de media es muy borrosa o difusa.

❑ El resultado del filtrado mediana está definido, pero muchos detalles importantes se pierden.

❑ Las esquinas se pierden.

❑ Las líneas finas no se pierden pero su lugar original puede quedar con perturbaciones.

❑ Visualmente, la imagen con el filtrado en mediana es preferible al filtrado de media.

❑ Viendo un estudio en frecuencia, se puede observar que ambos filtros actúan como filtros paso bajo y las altas frecuencias son atenuadas más que las bajas frecuencias.

En este ejemplo, y por regla general la gran mayoría, el filtrado no lineal (filtrado mediana), es mucho mejor que el filtrado lineal (filtrado de media). El problema del filtrado lo podríamos englobar desde los siguientes puntos:

- El propósito es eliminar el ruido;
- El ruido es impulsivo;
- La señal y el ruido ocupan la misma banda de frecuencia.

El filtrado no lineal ha resultado ser satisfactorio en solventar esos problemas.

## 1- MODELOS DE FILTROS NO LINEALES.

A continuación, se hará un conciso resumen de los principales filtros digitales no lineales utilizados. Debido a que en algunos casos, la traducción del nombre del filtro al castellano, puede resultar confusa, se ha optado por dejar algunos de ellos en su nombre originario.

### 1.1- FILTROS TRIMMED MEAN

- El filtrado mediana descarta los impulsos de manera efectiva.
- El filtrado mediana tiene problemas con el ruido gaussiano aditivo
- El desarrollo del filtrado de media era mejor que el filtrado mediana para eliminar ruido gaussiano aditivo.
- Pero el funcionamiento del filtro de media deterioraba drásticamente con tipos de ruido impulsivo.

Por tanto, un buen compromiso entre el filtrado mediana y el filtrado media podría ser filtrar con buen recaudo en situaciones donde tanto el ruido gaussiano como el impulsivo estén presentes.

Quizás la mejor manera, de filtrar sobre este compromiso, sea utilizando *trimmed means*.

La primera forma de obtener un filtro *trimmed mean*, el filtro *(r, s)-fold trimmed mean* se obtiene mediante:

1. Clasificar las muestras

2. Omitir todas las muestras  $r + s$ ,

$$f_{(1)}, f_{(2)}, \dots, f_{(r)} \text{ y } f_{(N-s+1)}, f_{(N-s+2)}, \dots, f_{(N)}$$

3. La salida es generada promediando las muestras restantes

$$\text{TrMean}(f_1, f_2, \dots, f_N; r, s) = \frac{1}{N - r - s} \sum_{i=r+1}^{N-s} f_{(i)}$$

Una modificación inmediata del *filtro (r,s)-trimmed mean* es el *(r,s) -fold Windorized mean filter* donde:

- Los valores de las  $r$  muestras más pequeñas se reemplazan por  $f_{(r+1)}$
- Los valores de las  $s$  muestras más pequeña se reemplazan por  $f_{(N-s)}$

$$\text{WinMean}(f_1, f_2, \dots, f_N; r, s) = \frac{1}{N} \left( rf_{(r+1)} + \sum_{i=r+1}^{N-s} f_{(i)} + sf_{(N-s)} \right)$$

## 1.2.- OTROS FILTROS TRIMMED MEAN

En el *filtro modificado trimmed mean* tenemos:

- Un valor real constante  $q$  que es fijado
- Todas las muestras en el rango  $[N_{(k+1)} - q, N_{(k+1)} + q]$  son promediadas, y la media da la salida:

$$MTM(f_1, f_2, \dots, f_N; q) = \frac{\sum_{i=1}^N a_i f_i}{\sum_{i=1}^N a_i}$$

donde

$$a_i = \begin{cases} 1, & \text{si } |f_i - f_{(k+1)}| \geq q, \\ 0 & \text{cualquier otro} \end{cases}$$

La idea del *modified trimmed* conlleva a excluir esas muestras en la ventana que se encuentran lo suficientemente lejos del valor de la mediana.

El parámetro  $q$  se usa para clasificar las muestras en dos caminos: el que se encuentra demasiado lejos del valor de la mediana y aquellos en los que se encuentran muy próximos a la mediana.

Una extensión adicional del *filtro modificado trimmed mean* es:

- Primero se computa la mediana, denotado por  $med$ , desde una ventana relativamente pequeña (tamaño  $N$ );
- Usar, como salida, el valor de media de las muestras comprendidas en el intervalo  $[med - q, med + q]$  a través de las muestras de una ventana grande (tamaño  $M$ ), centrada en el mismo punto.

La idea anterior, genera el *filtro de doble ventana modificado trimmed mean*, y es capaz de usar grandes ventanas para suprimir ruido gaussiano aditivo y en el mismo instante, preservar detalles para desechar pixels que se encuentran lo suficientemente lejos de la mediana de la ventana pequeña.

### 1.3.- L-FILTROS

Los L-Filtros son estimadores que realizan un compromiso entre:

- Una operación pura no lineal (ordenación)
- Una operación lineal pura (ponderación)

El punto de salida se obtiene como una suma ponderada de los valores de datos ordenados en la ventana que se desplaza. El conjunto de ponderaciones determina las características de los filtros.

Sea el vector de ponderación de un L-filtro denotado como  $a=(a_1, a_2, \dots, a_N)$  y el vector de entrada  $f=(f_1, f_2, \dots, f_N)$ . Entonces la salida de un L-filtro, vendrá dado por

$$L(f_1, f_2, \dots, f_N; a) = \sum_{i=1}^N a_i f_{(i)}$$

La gran ventaja de los L-filtros es que para una conocida distribución de ruido es posible elegir las ponderaciones del filtro de manera de que se pueda optimizar el filtro en el sentido del error cuadrático de media.

### 1.4- C-FILTROS

Los L-filtros (al igual que los filtros mediana) descartan la información del orden espacial de los datos completamente.

Esto causa problemas, por ejemplo en la preservación de detalles, al ir incrementando el tamaño de las ventanas.

Como la información del orden espacial es descartada, esos filtros son también incapaces de recuperar las características espectrales de la imagen.

Un método de incorporar tanto la información de orden espacial y la información de rango de orden de la secuencia de entrada es mediante el *filtro de combinación* o *C-filtro*. Los *C-filtros* incluyen:



- Filtro lineal FIR y
- *L-filtros*

Un *C-filtro* puede ser entendido de la siguiente manera:

- Un *C-filtro* es un *L-filtro* con los coeficientes de  $N_{(i)}$  dependiente sobre su posición espacial en la ventana.
- Un *C-filtro* es un filtro FIR con los coeficientes de  $N_{(i)}$  dependiente sobre rango dentro de la ventana.

La salida de un *C-filtro* con coeficientes  $N \times N$ ,  $C = [c(i, j)]$  y entradas  $(f_1, f_2, \dots, f_N)$ , vendrá dada por:

$$C(f_1, f_2, \dots, f_N; C) = \sum_{I=1}^N c(R(f_i), i) N_i$$

Donde  $R(X_i)$  es el rango de las muestras  $f_i$ .

La salida del *C-filtro* normalizado se define por

$$NormC(f_1, f_2, \dots, f_N; C) = \frac{\sum_{I=1}^N c(R(f_i), i) f_i}{\sum_{I=1}^N c(R(f_i), i)}$$

### 1.5.- FILTRADO MEDIANA PONDERADO

En el filtrado mediana, cada muestra dentro de la ventana de filtrado tiene la misma influencia en el filtrado de salida.

Para mejorar el rendimiento, un camino podría ser dar mayor énfasis las muestras de la ventana del filtrado que se encuentren en una determinada posición; por ejemplo, al

valor central  $f'$  de la muestra la cual se está filtrando en ese momento. La idea es desarrollar un *filtro mediana ponderado*.

### 1.6.- RANGO DE ORDEN Y FILTROS ESTADISTICOS PONDERADO.

Los filtros de rango de orden son simples modificaciones del filtrado mediana. La salida del *r-esimo filtro de rango de orden* viene dado por

$$RO(f_1, f_2, \dots, f_N; r) = f_{(r)}$$

esto es, el *r-esimo* orden estadístico de las muestras  $f_1, f_2, \dots, f_N$  en la ventana del filtro. Los filtros de rango de orden pueden ser utilizados en situaciones donde la distribución de ruido no es simétrica; por ej. cuando hay más impulsos positivos que negativos. En este caso el uso de algún filtro de rango de orden de bajo orden ( $r < k$ ) puede proveer filtros más robustos comparado con el filtro mediana.

Los *filtros estadísticos de rango de orden* son definidos de una manera análoga a l filtrado mediana ponderado.

La salida del *r-esimo* filtro estadístico de rango de orden con pesos  $a = (a_1, a_2, \dots, a_N)$ , viene dada por

$$WOS(f_1, f_2, \dots, f_N; r) = r - \text{esimo orden estadístico de} \\ \{a_1 \diamond f_1, a_1 \diamond f_1, \dots, a_N \diamond f_N\}$$

Los filtros ponderados de orden estadísticos pueden mejorar las propiedades de preservación de detalles de los filtros de rango de orden de una manera similar al mejoramiento proporcionado por los filtros mediana ponderados sobre el filtrado mediana estándar.

### 1.7.- FILTROS MEDIANA MULTIPLATAFORMA

En el *filtrado mediana multiplataforma*, en lugar de una operación de mediana, numerosas plataformas de filtros son utilizadas.

El *filtro mediana separable en 2-D* es una modificación del filtrado mediana que genera propiedades comparables al filtro mediana pero es mucho más rápido.

El *filtro mediana separable en 2-D* se obtiene usando dos filtros mediana sucesivos de 1-D con una longitud en la ventana de  $z = 2l+1$  ( $z * z = N$ ), el primero a través de las filas y el segundo a través de las columnas:

$$\begin{aligned}
 & \text{SepMed} \begin{pmatrix} f_{1,1} & f_{1,2} & \cdots & f_{1,z} \\ f_{2,1} & f_{2,2} & \cdots & f_{2,z} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{z,1} & f_{z,2} & \cdots & f_{z,z} \end{pmatrix} \\
 & = \text{MED}\{\text{MED}\{f_{1,1}, f_{1,2}, \dots, f_{1,z}\}, \dots, \text{MED}\{f_{z,1}, f_{z,2}, \dots, f_{z,z}\}\}
 \end{aligned}$$

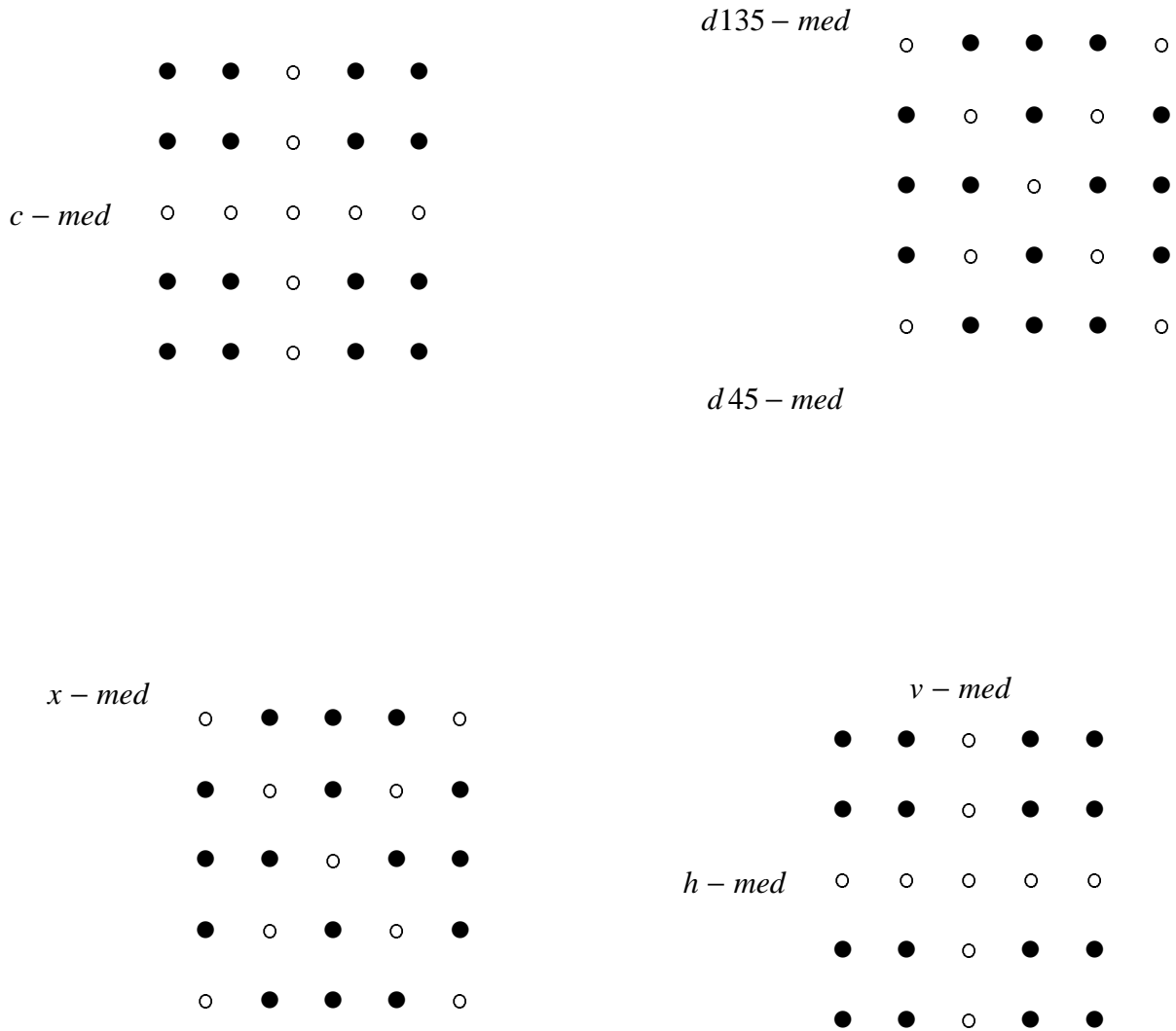
Denotaremos los resultados de los filtros mediana horizontal, vertical, en diagonal, en cruz y en forma de f mediante:

$$\begin{aligned}
 h - med &= \text{MED}\{f_{L+1,1}, f_{l+1,2}, \dots, f_{L+1,z}\} \\
 v - med &= \text{MED}\{f_{1,L+1}, f_{2,l+1}, \dots, f_{z,L+1}\} \\
 d45 - med &= \text{MED}\{f_{z,1}, f_{z-1,2}, \dots, f_{1,z}\} \\
 d135 - med &= \text{MED}\{f_{1,1}, f_{2,2}, \dots, f_{z,z}\} \\
 c - med &= \text{MED}\{f_{L+1,1}, f_{l+1,2}, \dots, f_{L+1,z}\} \cup \text{MED}\{f_{1,L+1}, f_{2,l+1}, \dots, f_{z,L+1}\} \\
 x - med &= \text{MED}\{f_{z,1}, f_{z-1,2}, \dots, f_{1,z}\} \cup \text{MED}\{f_{1,1}, f_{2,2}, \dots, f_{z,z}\}
 \end{aligned}$$

Entonces, los siguientes filtros mediana multiplataforma pueden ser obtenidos mediante:

$$\begin{aligned}
 MSM1 &= MED\{f_{L+1,L+1}, h-med, v-med\} \\
 MSM2 &= MED\{f_{L+1,L+1}, d45-med, d135-med\} \\
 MSM3 &= MED\{h-med, v-med, d45-med, d135-m\} \\
 MSM4 &= MED\{f_{L+1,L+1}, h-med, v-med, d45-med - d135\} \\
 MSM5 &= MED\{f_{L+1,L+1}, c-med, x-med\}
 \end{aligned}$$

Gráficamente tendríamos:



Una combinación de filtros lineales y no lineales puede ser obtenida reemplazando los subfiltros de los filtros mediana multiplataforma por filtros lineales.

La idea de esto son los *filtros híbridos mediana*:

- Algunos de los subfiltros lineales son típicamente obtenidos para seguir el curso de la señal de entrada y suavizar el ruido gaussiano.
- El uso de la mediana facilita el desarrollo de filtros limitado a bordes u otras áreas de transición
- Debido a los subfiltros, este tipo de filtros permiten mayor diseño de posibilidades que el filtro mediana.
- Eligiendo un pequeño número de subfiltros lineales, la eficiencia de implementación de las estructuras puede ser desarrollada para entornos donde las operaciones de comparación / intercambio necesarias para encontrar la mediana son costosas.
- Los filtros híbridos mediana pueden ser utilizados además para aliviar el problema de los bordes de *jitter* en el filtrado de mediana.

La salida de un filtro híbrido mediana, viene dado por:

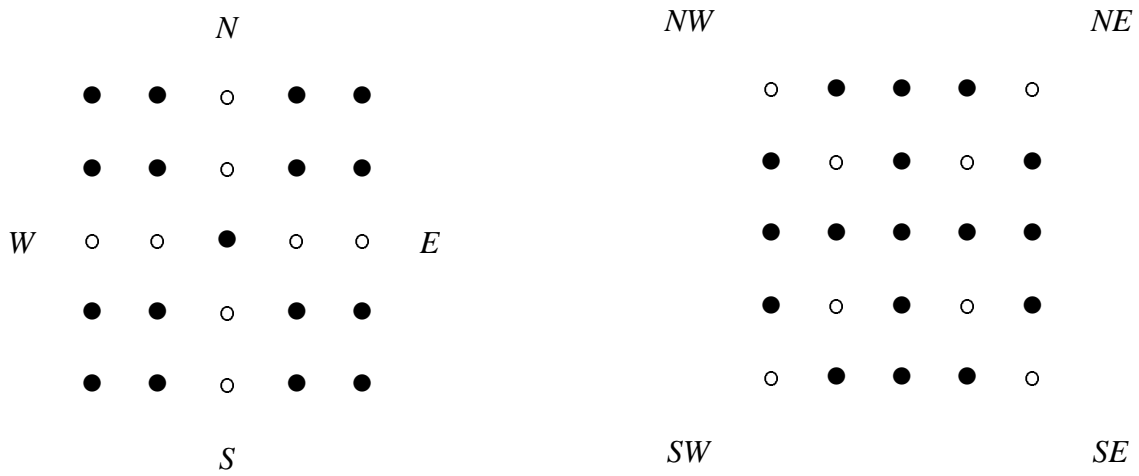
$$MedHybr(f_1, f_2, \dots, f_N) = MED\{F_1(f_1, f_2, \dots, f_N), \dots, F_M(f_1, f_2, \dots, f_N)\}$$

donde los filtros  $f_1(\cdot), \dots, f_M(\cdot)$  son filtros FIR o IIR.

Existe una gran variedad de filtros híbridos mediana en 2-D debido a la posibilidad de elegir un gran número de subfiltros, su tipo, y también, la forma de la ventana y ponderación. Un ejemplo, es el llamado *filtro ILH+* definido mediante

$$1LH + \begin{pmatrix} f_{1,1} & f_{1,2} & \cdots & f_{1,z} \\ f_{2,1} & f_{2,2} & \cdots & f_{2,z} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{z,1} & f_{z,2} & \cdots & f_{z,z} \end{pmatrix}$$

$$= MED\{g_N, g_E, g_W, f_{l+1, j+1}\}$$



Su versión rotada es el llamado *filtro R1LH+*:

$$R1LH + \begin{pmatrix} f_{1,1} & f_{1,2} & \cdots & f_{1,z} \\ f_{2,1} & f_{2,2} & \cdots & f_{2,z} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{z,1} & f_{z,2} & \cdots & f_{z,z} \end{pmatrix}$$

$$= MED\{g_{NW}, g_{SW}, g_{NE}, f_{l+1, j+1}\}$$

Combinando los filtros  $ILH+$  y  $RILH+$ , resulta el filtro  $2LH+$  que viene dado por la expresión:

$$2LH+ \begin{pmatrix} f_{1,1} & f_{1,2} & \cdots & f_{1,z} \\ f_{2,1} & f_{2,2} & \cdots & f_{2,z} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{z,1} & f_{z,2} & \cdots & f_{z,z} \end{pmatrix}$$
$$= MED\{LH+, RILH+, f_{l+1,j+1}\}$$

La mediana puede naturalmente ser reemplazada por cualquier otro orden estadístico o, más generalmente, cualquier orden estadístico ponderado. Entonces se obtienen los *filtros híbridos FIR-WOS*.

### 1.8.- FILTROS SELECTIVOS DE REALZADO DE BORDES

Los *filtros selectivos* son filtros multinivel donde muchas subventanas son usadas, y basadas sobre algún criterio para la cual la salida sea elegida para ser una de las salidas de esas ventanas.

Las medias y las varianzas de las subventanas son calculadas y la salida está dada por la media de las ventanas que han tenido una pequeña varianza.

Por tanto, la idea es coger la salida desde el área con pixels vecinos más homogéneos.

El *filtro de comparación y selección* es un filtro suavizador de realzado de bordes.

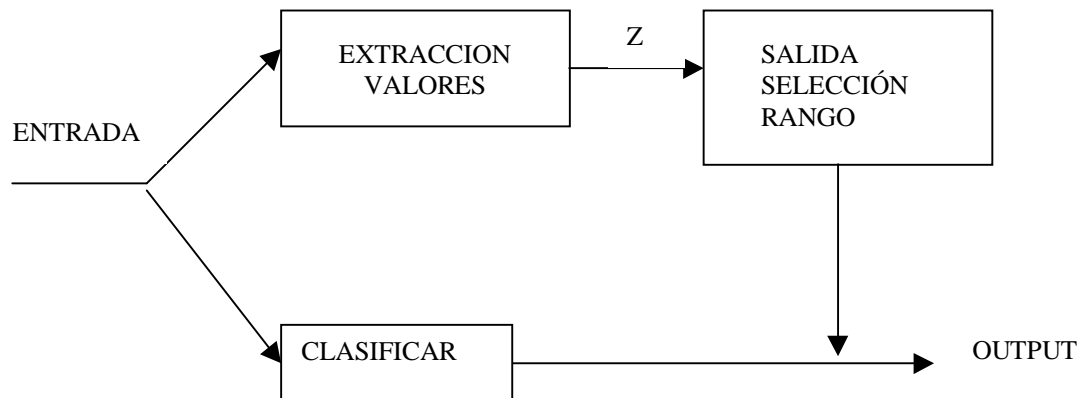
Este filtro está basado en la observación que la salida del filtrado mediana es menor que la salida del filtrado de media antes de un borde de manera ascendente; y la salida del filtrado mediana es mayor que la salida del filtrado de media después de un borde de manera ascendente.

Es decir, para realzar un borde borroso, el valor de alguna muestra menor que la mediana (por ejemplo, la menor muestra) se elige para la salida si la mediana es menor que

la media; para otro caso, el valor de alguna muestra mayor que la mediana (por ejemplo el valor máximo) es elegida para la salida.

### 1.9.- FILTROS DE SELECCIÓN DE RANGO

El diagrama de bloques que ilustra el filtrado de selección de rango es el siguiente:



- Uno de los bloques extrae alguna información de las muestras  $f = (f_1, f_2, \dots, f_N)$ . Esa información se almacena en un vector característico  $z$ .
- El segundo bloque genera el vector ordenado  $f_{( )}$ .
- El tercer bloque, la salida del selector de rango, elige las muestras más apropiadas de  $f_{( )} = (f_1, f_2, \dots, f_N)$  para ser la salida. Esta elección está basada en el vector característico  $z$  y la regla de selección de rango  $S(\cdot)$ .

### 1.10 M-FILTROS

Un  $M$ -estimador o un  $M$ -filtro se define por una función  $\rho$  sobre  $\mathfrak{R}$ :

$$M(f_1, f_2, \dots, f_N; \rho) = \arg \min_{\theta \in (-)} \sum_{i=1}^N \rho(f_i - \theta)$$



O por la derivada parcial  $\psi$  (con respecto a  $\theta$ ) de  $\rho$ ; la estimada  $M(f_1, f_2, \dots, f_N)$  satisface la ecuación:

$$\sum_{i=1}^N \psi(f_i - \theta) = 0$$

### 1.11.-R-FILTROS

Los *R-Filtros* se basan en los conocidos *R-estimadores*, que están basados en tests de rangos.

El primer *R-filtro* introducido fue el *filtro Wilcoxon*:

$$\begin{aligned} Wil(f_1, f_2, \dots, f_N) &= MED \left\{ \frac{f_i + f_j}{2} : 1 \leq i \leq j \leq N \right\} \\ &= \\ &MED \left\{ \frac{f_{(i)} + f_{(j)}}{2} : 1 \leq i \leq j \leq N \right\} \end{aligned}$$

Esto es, el *filtro Wilcoxon* consiste de operaciones lineales, llamados promedios de *Walsh*  $W_{i,j} = (f_i, f_j) / 2$  o *promedios ordenados de Walsh*  $W_{(i,j)} = (f_{(i)}, f_{(j)}) / 2$  y de una operación lineal.

Un filtro relacionado con el *filtro Wilcoxon* es el *D-filtro Hodges-Lehmann*, que viene dado por la expresión:

$$L - H(f_1, f_2, \dots, f_N) = MED \left\{ \frac{f_{(i)} + f_{(N-i+1)}}{2} : 1 \leq i \leq k + 1 \right\}$$

Esto es, el *D-filtro Hodges-Lehmann* es un caso especial del *filtro Wilcoxon* y es la mediana de los cuasi medio rangos  $(f_{(i)}, f_{(N-i+1)}) / 2$ .

### 1.12.- PONDERACION MEJORADA CON FILTROS DE RANGO MINIMO

La *Ponderación Mejorada de m valores con filtros de rango mínimo (WMMR<sup>m</sup>)* han sido desarrolladas para restaurar una gran clase de bordes deformados, mientras suaviza las regiones de ruido sin bordes y rechazar impulsos.

En un *\_filtro WMMR<sup>m</sup>* se seleccionará  $m$  ( $k < m \leq 2k + 1$ ) de los valores ordenados dentro de la ventana de desplazamiento con el rango más pequeño, y ponderar esos valores.

1. El índice  $J$  para minimizar  $f_{(J+m-1)} - f_{(J)}$  es encontrado y entonces
2. La ponderación media de los valores  $f_{(J)}, f_{(J+1)}, \dots, f_{(J+m-1)}$  con pesos  $a_1, a_2, a_m$  se calcula y nos da la salida.

Claramente,  $J$  no necesariamente es única. En este caso, la salida viene dada por la media de las ponderaciones medias correspondientes a todos los valores que minimizan el rango.

### 1.13.- FILTROS DE MEDIAS NO LINEALES

La media no lineal de los números  $f_1, f_2, \dots, f_N$  viene dada por

$$y = g^{-1} \left( \frac{\sum_{i=1}^N a_i (f_i)}{\sum_{i=1}^N a_i} \right)$$

donde  $g(x)$  es una función  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  y los  $a_i$  son las ponderaciones.

1. Los valores de la señal son transformados por  $g(\cdot)$  en nuevos valores.
2. La media de las ponderaciones de los nuevos valores se computa.

3. La salida es obtenida aplicando la transformación inversa a la media de las ponderaciones.

Naturalmente, después de la transformación  $g(\cdot)$  algún otra operación en lugar del promedio puede ser usada, por ejemplo algún filtro no lineal.

Sea  $a_i = a_j$  para todo  $i, j$  y considerando los siguientes casos de  $g(x)$ :

$$g(x) = \begin{cases} x, & \text{el filtro medio aritmetico MEAN} \\ 1/x, & \text{el filtro medio armonico HARM} \\ \ln x, & \text{el filtro medio geometrico GEOM} \\ x^p, p \in R \setminus \{-1, 0, 1\}, & \text{el filtro medio } L_p \end{cases}$$

Si usamos señales dependientes de las ponderaciones  $a_i = X_i^p$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ , y la función  $g(x) = x$ , obtenemos el *filtro contra-armónico CONTR<sub>p</sub>*.

El filtro de media geométrico tiene una importante relación con los *filtros homomórficos*, que se usa en algunos casos donde el ruido es multiplicativo.

Un ejemplo típico de fuente de iluminación  $E[m,n]$ , en la cual con reflectancia  $r[m,n]$ , contribuye a una formación de imagen multiplicativa, es decir, más luminosidad en unos lados que en otros.

La imagen observada es

$$i[m,n] = r[m,n] * E[m,n]$$

y lo que se desea extraer es  $r[m,n]$  de ella. Cuando un logaritmo no lineal es aplicado a la imagen, el “ruido” multiplicado es transformado en ruido aditivo

$$\ln i[m,n] = \ln r[m,n] + \ln E[m,n]$$

Este ruido  $\ln E[m,n]$  es entonces atenuado por un filtro que da la señal

$$t[m,n] \approx \ln r[m,n]$$

y la transformación inversa (exponencial) se utiliza para obtener la imagen deseada

$$r[m,n] = \exp t[m,n]$$

#### 1.14.- FILTROS MORFOLÓGICOS

Un filtro  $F(\cdot)$  se llama morfológico si es

- incremento:  $f(x) \leq g(x)$  para todo  $x$  implica que  $F(f(x)) \leq F(g(x))$  para todo  $x$ ;
- idempotente:  $F(F(f(x))) = F(f(x))$  se mantiene para todo  $f$  y  $x$ .

La idempotencia garantiza que cualquier señal se cambia por el filtro en una señal de raíz por una iteración de filtrado. En otras palabras, el filtro repetido no cambia la señal otra vez.

#### 1.15.- FILTROS MORFOLOGICOS SUAVES

La estructura del sistema  $[B, A, r]$  consiste de tres parámetros, conjuntos finitos de  $A$  y  $B$  y un número natural  $r$  que satisface  $1 \leq r \leq |B|$ .

- El conjunto  $B$  se llama el conjunto de estructuración
- $A$  es llamado su *centro* (fuerte).

- $B \setminus A$  es llamado su *borde* (suave) y
- $r$  es llamado el *índice de orden de su centro* o también el *parámetro de repetición*
- El conjunto de estructuración describe la forma y el tamaño de la ventana deslizante,  $|B| = N$
- El centro (duro) describe un área especial dentro del conjunto de estructuración.

### 1.16.- FILTROS POLINOMICOS

Un *filtro de Volterra (polinómico) de orden M* se define por

$$\begin{aligned} Vol(f_1, f_2, \dots, f_N; h_o, h, H, \dots, H_M) = & h_o + \sum_{i_1=1}^N h_i f_{i_1} + \sum_{i_1=1}^N \sum_{i_2=1}^N h_{i_1, i_2} f_{i_1} f_{i_2} + \\ & + \dots + \sum_{i_1=1}^N \sum_{i_2=1}^N \dots \sum_{i_M=1}^N h_{i_1, i_2, \dots, i_M} f_{i_1} f_{i_2} \dots f_{i_M} \end{aligned}$$

El filtro cuadrático es:

$$Quad(f_1, f_2, \dots, f_N; H) = \sum_{i_1=1}^N \sum_{i_2=1}^N h_{i_1, i_2} f_{i_1} f_{i_2}$$

Este filtro puede quedar escrito en una matriz compacta de productos de la forma

$$Quad(f_1, f_2, \dots, f_N; H) = fHf^T$$

$$= (f_1, f_2, \dots, f_N) \begin{pmatrix} f_{1,1} & f_{1,2} & \dots & f_{1,z} \\ f_{2,1} & f_{2,2} & \dots & f_{2,z} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{z,1} & f_{z,2} & \dots & f_{z,z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_N \end{pmatrix}$$

donde  $\mathbf{H}$  es una matriz  $N \times N$  (normalmente simétrica). Esta matriz  $\mathbf{H}$  se denomina *kernel cuadrático* del filtro.

### 1.17.- FILTROS DEPENDIENTES DE DATOS

El *filtro local lineal de estimación del error cuadrático medio mínimo (LLMMSE)* es uno de los ejemplos de filtros dependientes de datos.

Este método de filtrado es el estimador local lineal del error cuadrático medio mínimo de la señal original  $S_i$  degradada por ruido blanco aditivo estacionario con media cero; por ejemplo  $f_i = S_i + N_i$ .

- Sea  $\sigma_n$  la estimación local de la desviación estándar del ruido  $N_i$
- Sea  $\sigma_s$  la estimación local de la desviación estándar de la señal  $f_i$
- Sea  $m$  la estimación local del promedio dentro de la ventana

La salida del filtro LLMMSE viene dada por

$$LLMMSE(f_1, f_2, \dots, f_N) = \left(1 - \frac{\sigma_n^2}{\sigma_N^2}\right) f^* + \frac{\sigma_n^2}{\sigma_N^2} m$$

ec. 1

Aquí asumiremos que para el proceso de ruido, se cumplirá que

$$0 \leq \frac{\sigma_n^2}{\sigma_s^2} \leq 1$$

En el procesado de imágenes, lo que se asumió anteriormente, para el ruido blanco aditivo rara vez ocurre, y a veces, se mantiene; Esto es, por ejemplo, para filtrado de ruido impulsivo, la ec.1 da la estimación local lineal del error cuadrático medio. De hecho la fórmula adecuada sería:

$$LLMMSE = \frac{\sigma_s^2}{\sigma_s^2 + \sigma_N^2} f^* + \left( 1 - \frac{\sigma_s^2}{\sigma_s^2 + \sigma_N^2} \right) m$$

donde  $\sigma_s$  es la desviación estándar de la señal original.

### 1.18.- FILTROS BASADOS EN DECISIONES

Los *filtros de supresión de impulsos* se basan en una simple pero efectiva idea; en cada posición, primero se decide o no si se debe encontrar un impulso; si hemos encontrado uno, se filtrará por algún filtro no lineal o por el contrario no se alterará.

Quizá el test más simple esté basado en la estadística:

$$D = \frac{|f^* - f_{(k+1)}|}{s}$$

donde

- $f^*$  es la muestra donde se está tomando la decisión
- $f_{(k+1)}$  es la mediana dentro de la ventana de desplazamiento, y
- $s$  es alguna escala de estimación

La escala de estimación más simple es la varianza de muestras, pero es una estimación no robusta. La mediana de las desviaciones absolutas de la mediana es la que se suele utilizar.

### 1.19.- CONCLUSIONES GENERALES

Aunque en principios, todos los filtros expuestos anteriormente se podrían implementar para el procesado de imágenes, hay algunos por ejemplo como el *filtro de pila* que al trabajar bit a bit y debido a que cada pixel tiene 8 bits y una matriz (imagen) puede constar fácilmente de 256 x 256 bits, el operar con éste tipo de filtro, podría resultar poco práctico y tedioso.

Hay otros filtros como el *filtro dependiente de datos* o el *filtro basado en decisiones* que al ir pidiendo datos, puede que al final resulte molesto o pierda atractivo.

En los capítulos sucesivos, se explicarán algunos filtros de manera mucho más extensas.